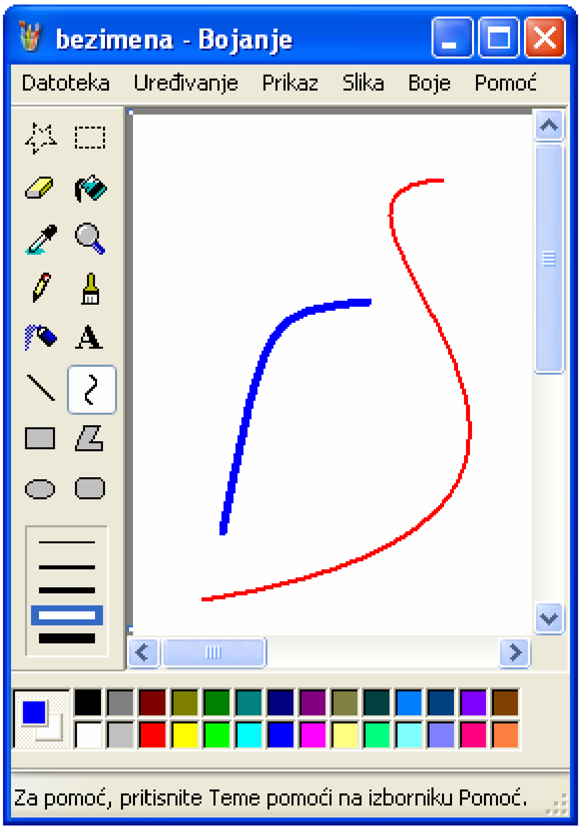
Šime Šuljić

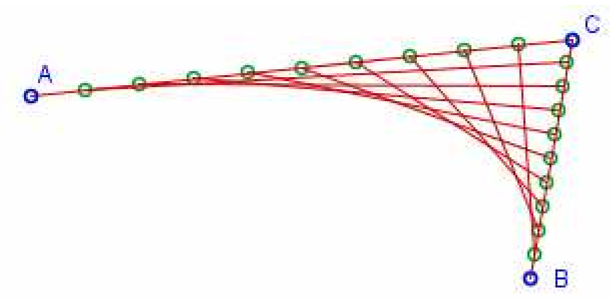
Bézierove krivulje

Među crtaćim priborom krivuljar svojim oblikom posebno plijeni našu pažnju. Zgodna ali i veoma korisna igračka! Treba li dvije točke na nekom nacrtu spojiti zakrivljenom crtom može se to učiniti vrlo jednostavno rubnim dijelom krivuljara. Njime je moguće dobiti različite krivulje. Traže se obično nešto oku ugodno jer je oblikovanje postalo vrlo važno. Istina je da danas mnogi crtaju ali malo tko ručno, pa se ni krivuljari više ne rabe tako često. Najčešće se crta na zaslonu računala. Programi za crtanje raspolažu alatima za crtanje raznih linija i oblika. Svi, pa čak i oni najjednostavniji, kao što je program *Bojanje* koji se nalazi među *Pomagalima* na vašem računalu imaju alat koji se zove **Krivulja**. Te krivulje određene su dvjema krajnjim točkama i jednom ili više kontrolnih točaka kojima se regulira zakrivljenost njenih lukova. Tako dobivene krivulje zapravo se nazivaju Bezierove krivulje. Godine 1962. za potrebe oblikovanja automobila u Renaultovim tvornicama, raširio ih je francuski inženjer **Pierre Etienne Bézier** (1910. – 1999.). Bezier je jedan od utemeljitelja **CAD/CAM** sustava (Computer-Aided Design/ Computer-Aided Manufacturing). Krivulje je zapravo nekoliko godina ranije uveo **Paul de Casteljau,** fizičar i matematičar zaposlen u Citroënu. On je otkrio numerički algoritam za izračun krivulja.



Geometrijska konstrukcija

Postavimo sada zadatak konstrukcije jednog zakrivljenog luka u *Geogebrinom* geometrijskom prozoru. Pokušajmo najprije „opisati“ tangentama jednostavnu krivulju. Potrebne su tri točke, *A* i *B* kao rubne točke i točka *C* kao kontrolna točka. Podijelimo dužine *AC* i *BC* točkama na deset jednakih dijelova. U Geogebri dijeljenje dužine u zadanom omjeru možemo izvesti naredbom:



$$A + t(B - A),$$

gdje je t broj između 0 i 1. Kako bismo dobili sve točke odjednom koristimo naredbu Niz:

$$N_1 = \text{Niz}[A + k\ (C - A),\ k,\ 0,\ 1,\ 0.1],$$

odnosno

$$N_2 = \text{Niz}[C + k\ (B - C),\ k,\ 0,\ 1,\ 0.1],$$

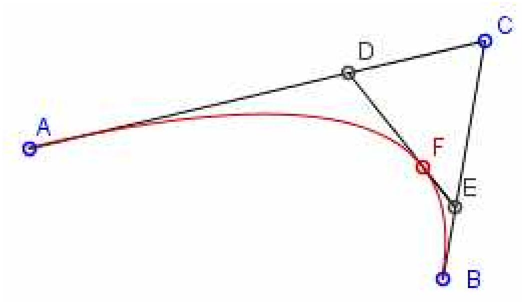
gdje se k mijenja od 0 do 1 s korakom povećanja 0.1. Isto napravimo za dužinu BC. Spojimo sada točke na dužini AC počevši od točke A redom s točkama na dužini CB naredbom:

$$\text{Niz}[\text{Dužina}[\text{Element}[N_1,\ k],\ \text{Element}[N_2,\ k]],\ k,\ 1,\ \text{Duljina}[N_1]].$$

Ova ugniježđena naredba znači da će program nacrtati niz dužina čija je prva rubna točka k-ti element niza N_1, a druga rubna točka k-ti element niza N_2. Taj niz počinje s prvim elementom jednog niza i završava s posljednjim elementom drugog niza. Redni broj posljednjeg broja u nizu je određen naredbom Duljina[N_1].

Umjesto većeg broja dužina, odnosno tangenti krivulja bit će dovoljna jedna dužina $\overline{DE}$ koja će se rubnim točkama gibati po dužinama $\overline{AC}$ i $\overline{CB}$. U tu svrhu potrebno je definirati klizač t u granicama od 0 do 1, a potom zadajmo naredbe:

$$D = A + t\ (C - A) \quad \textbf{(1)}$$
$$E = C + t\ (B - C) \quad \textbf{(2)}$$
$$\text{Dužina}[D,\ E],$$



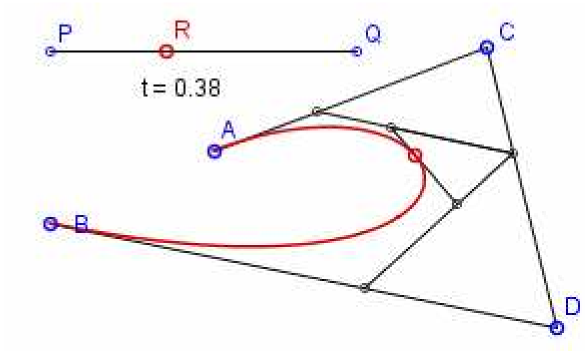
$$F = D + t\ (E - D) \quad \textbf{(3)}$$

Ovdje je točka F diralište. Uključimo li mogućnost ostavljanja traga te točke pri promjeni vrijednosti parametra t, točka F će „pisati“ krivulju. Istu krivulju moguće je dobiti kao *lokus*. Za funkcioniranje naredbe *Lokus* potrebne su dvije zavisne točke. Zato je umjesto parametra t definiranog preko klizača, potrebno redefinirati parametar t preko točke koja pripada nekoj dužini. Zadajmo dužinu PQ i na njoj točku R i definirajmo parametar t naredbom:

$$t = \text{AfiniOmjer}[P,\ Q,\ R].$$

Krivulju kao lokus dobivamo naredbom Lokus[F, R], pritom je važan redoslijed točaka. Zavisna točka ide na prvo mjesto. Dobivena krivulja naziva se Bezierova krivulja **drugog reda**. Bezierova krivulja drugog reda zapravo je luk parabole.

Zadatak. Konstruirajte parabolu kojoj pripada dana Bezierova krivulja.
Pomoć: polovište težišnice iz vrha C trokuta ABC pripada Bezierovoj krivulji (zašto?), pa se konstrukcija svodi na konstrukciju parabole kroz tri točke. Probajte riješiti ovaj izazovan zadatak!



Dodamo li konstrukciji još jednu kontrolnu točku, a princip konstrukcije proširimo kao na slici 4 dobit ćemo Bezierovu krivulju **trećeg reda**, s kojom je već moguće oblikovati petlju. Po istom načelu konstrukciju možemo dalje usložnjavati na više redove.

Jednadžba Bezierove krivulje drugog reda

Uzmimo sada naredbu (3), odnosno jednadžbu kojom smo dobili točku *F*. Ona glasi:

$$F = D + t\ (E - D).$$

Zamijenimo li točke *D* i *E* formulama (1) i (2), nakon sređivanja dobit ćemo njenu parametarsku jednadžbu:

$$F(t) = (1 - t)^2\ A + 2t\ (1 - t)\ C + t^2\ B,\ t \in\ [0, 1].$$

Upisom izraza $(1 – t)^2A + 2t(1 – t)C + t^2B$ u Geogebrino polje za unos, uz uvjet da su prethodno definirane točke i parametar *t* moguće je izravno, bez konstrukcije pomoćnih točaka, dobiti točku koja kao trag ili kao *lokus* crta krivulju.

Cijelo smo vrijeme koristili jednadžbe koje se oslanjaju na radijvektor točaka s jedne strane, a s druge strane koristili geometrijsku naredbu *Lokus*. Zadajmo sada krivulju čisto algebarski. Parametarskom jednadžbom izrazimo koordinate točaka Bezierove krivulje. Prethodno zadajmo tri točke *A*, *B* i *C*, te parametar *t* koji sada može biti zadan kao broj ili klizač. U polje za unos treba upisati naredbu za dobivanje krivulje:

Krivulja[(1 – t)² x(A) + 2t (1 – t) x(C) + t² x(B), (1 – t)² y(A) + 2t (1 – t) y(C) + t² y(B), t, 0, 1]

Zaključak

Uporaba matematike danas je sve češća u tzv. virtualnom svijetu, a to je ono što učenike može više zaintrigirati. Ovdje je dan jedan pomalo eksperimentalni uvod u temu. Konstrukcijama u Geogebri i proučavanjem nekih internetskih sadržaja možete zaći dublje u problem. Evo nekoliko linkova sa sadržajima i s Geogebrinim datotekama:

1. Bézier curve, http://en.wikipedia.org
2. What's a Bézier Curve?, http://www.moshplant.com/direct-or/bezier
3. Geogebrino skladište, http://www.geogebra.org/en/upload - Home / english / zbirad
4. GeoGebraWiki, http://www.geogebra.org/de/wiki/index.php/Bezier-CA2008